課題演習 A3 前期

Mössbauer Effect を用いた ^{57}Fe の g-factor の測定 (暫定版)

南 暁彦[1], 慶山 篤[2]

[1]京都大学理学部物理学教室,zag33161@sky.zero.ad.jp
[2]京都大学理学部物理学教室,s00x0991@ip.media.kyoto-u.ac.jp

概　要

メスバウアー効果の利用は，分光学的に確立された重要な一観測手段である．メスバウアー分光法における基礎的な手法の実習として，今回の実験では ^{57}Fe 原子核の吸収スペクトルに見る超微細構造の観測から，核スピンに起因する磁気モーメントの測定を行なった．この結果，^{57}Fe 原子核の g-factor が精度良く決定された．

1. 序文

本稿は，平成 13 年度前期授業「物理科学課題演習 A3 (原子核と電磁場の相互作用)」において，熊取の原子炉実験場で行なわれた学生実験「**Mössbauer Effect** を用いた ^{57}**Fe** の g**-factor** の測定」に関する報告書である．

メスバウアー (R. L. Mößbauer, 1929-) が 1957 年に発見し，1961 年にその功績によりノーベル賞を受賞した無反跳核 γ 線共鳴現象 (メスバウアー効果) は，原子の構造解析にとって非常に強力な手段を提供するものであった．γ 線が原子に吸収される際には通常，標的原子の反跳を伴い，エネルギーの損失を避けられない．しかしメスバウアーの発見した無反跳の共鳴においては，そうした損失をゼロにできるのみならず，共鳴吸収のスペクトルは極めて厳密な単色線 (線スペクトル) となるのである．これにより，メスバウアー効果を利用した観測は非常に高いエネルギー分解能を持つことになる．

そのエネルギー分解能が真価を発揮したのは，特に ^{57}Fe や ^{119}Sn についてのメスバウアースペクトルの観測であった．これらのスペクトルは単純な 1 本の単色線ではなく，原子核と軌道電子の相互作用に起因する，超微細構造と呼ばれる分裂構造を持っていることが判明する．従来なら無視できるほど小さいと見なされていたものが，目に見えるピークをもって観測されたのである．メスバウアー効果のこうした高い分解能を利用した測定は，物理・化学の多くの分野に応用されている．

^{57}Fe の観測は，メスバウアー分光法の実験技法として基礎的であるとともに，様々な原子構造の解析にメスバウアーの発見が大いに応用可能なことを示したという点で，歴史的にも重要である．当実験では，^{57}Fe 原子のメスバウアースペクトルに見られる超微細構造を観測し，原子核の磁気モーメントを決定する g 因子の値を得ることを目的とする．

2. 理論

Mo̎ssbauer 効果　基底状態からエネルギー E だけ高い励起状態にある原子核が γ 線を放出し, そのエネルギーわずかだけ異なる励起準位を持つ原子に吸収させることをで吸収体の励起準位を測ることを考える。このわずかだけ異なるエネルギー差は, 線源を動かすこと γ 線を Doppler シフトさせることで補填することができる。

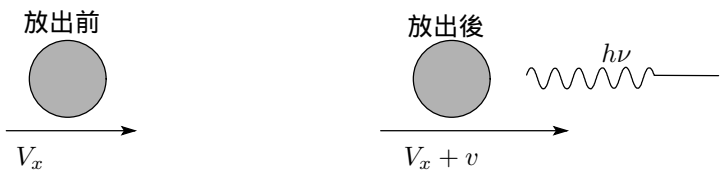


Fig. 1.1: 反跳

ところが図のように通常,γ 線を放出するとき γ 線の運動量の分だけ逆向きに反跳 (recoil) を受ける (図では便宜的に反跳を放出方向と同一にした)。それによって γ 線のエネルギーはエネルギー差 E と Doppler シフト分すべてを受け取ることができなくなる。それによって線源のとなりにある吸収体には励起エネルギーに届かなくなる。実際にそのエネルギー差を補填することが Mössbauer 効果を用いてできる。

図のように原子核が γ 線を放出するとき, エネルギーと運動量が保存する。

$$E + \frac{1}{2}MV_x^2 \quad = \quad E_\gamma + \frac{1}{2}M\left(V_x + v\right) \tag{1}$$

$$MV_x = M(V_x + v) + \frac{E_\gamma}{c} \tag{2}$$
$$\tag{3}$$

今問題となっているのは励起で得られるエネルギーと γ 線のエネルギー差なので, それを計算すると

$$\Delta E = E - E_\gamma = \frac{1}{2}Mv^2 + MvV_x \tag{4}$$

となる。この差が 0 となるには γ 線源の質量が十分大きければよいので実際の Mössbauer 効果の実験では結晶を用いることで γ 線のエネルギー減少を防ぐことができる。

実際には次のような装置 (Transducer) を用いることで Doppler シフトさせる。

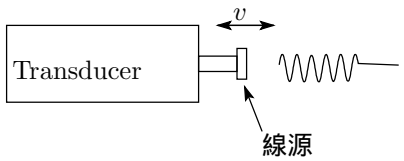


Fig. 2.2: Transducer

γ 線の振動数を ω', この 1 次元系運動系での波数ベクトルは

$$k'^\mu = \begin{pmatrix} \omega' \\ ck' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega' \\ \omega' \end{pmatrix}$$

となる。静止系での波数ベクトルはこれを逆 Lorentz 変換することで得られ,

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega' \\ \omega' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\omega' + \gamma\beta\omega' \\ \gamma\omega' + \gamma\beta\omega' \end{pmatrix}$$

これにより静止系での振動数は

$$\begin{aligned} \omega &= \gamma\omega' + \gamma\beta\omega' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\omega' + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\omega' \\ &\approx \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)\omega' + \beta\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)\omega' \\ &\approx \omega' + \beta\omega' \end{aligned}$$

ここで $\beta \ll 1$ であることから 2 次以上を無視した。γ 線のエネルギーはこれに $\hbar$ をかけることで得られ,

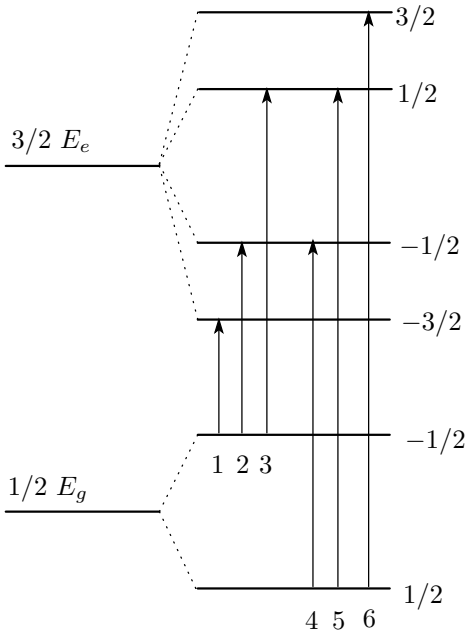
$$\frac{\hbar\omega - \hbar\omega'}{\hbar\omega'} = \beta$$

という形にすることができる。左辺分母は γ 線のエネルギー E であるからこれを

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{v}{c} \tag{5}$$

とすることができる。

^{57}Fe の準位分裂　^{57}Fe は図のように準位が分裂している。



単純に考えると合計で 8 種類の遷移が考えられる。しかしここでは計算はしないが Fermi の黄金律によりそのうち二つの遷移確率が 0 になる。そしてその他の遷移に関しても理想的な系では次のような比が成り立つ。

1 の遷移確率 : 2 の遷移確率 : 3 の遷移確率 : 4 の遷移確率 : 5 の遷移確率 : 6 の遷移確率 = 3 : 2 : 1 : 1 : 2 : 3

これらからどの Mössbauer スペクトルとしては大きく 6 つの吸収線が現れるはずで、その深さは遷移確率に比例するであろうからどのエネルギー準位間の遷移がどの吸収線に対応しているかがわかる。

3. 実験の手順

図のような回路を用いて実験を行なった。

1.Laser Interferometer+10.Velocity Calibrator WISSEL MVC-450

2.Transducer MVT2000

3.Proportional Counter Kr 2atm

4.Pre.Amp ORTEC 142PC

5.HV Supply ORTEC459 2400V

6.ADC+MCS ADC4801A

7.Linear Amp.+8.SCA ORTEC590A

9.MCS LN-6400 Network MCA

11.Driving Amp. WISSEL Mössbauer driving unit MR-260AH

12.Function Generator TOPOLOGIC SYSTEM.INC Function Generator Model MGF-220

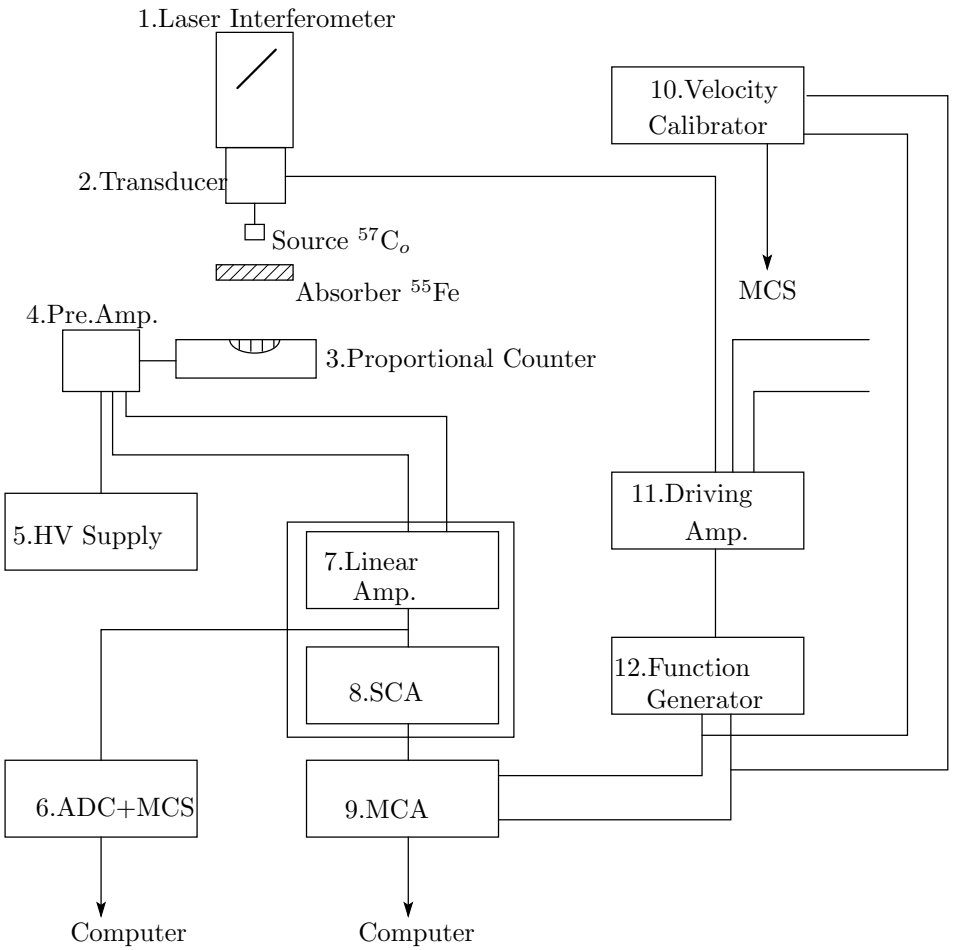


Fig. 3.1: 回路

4. 測定結果

実験結果は以下のとおりである。

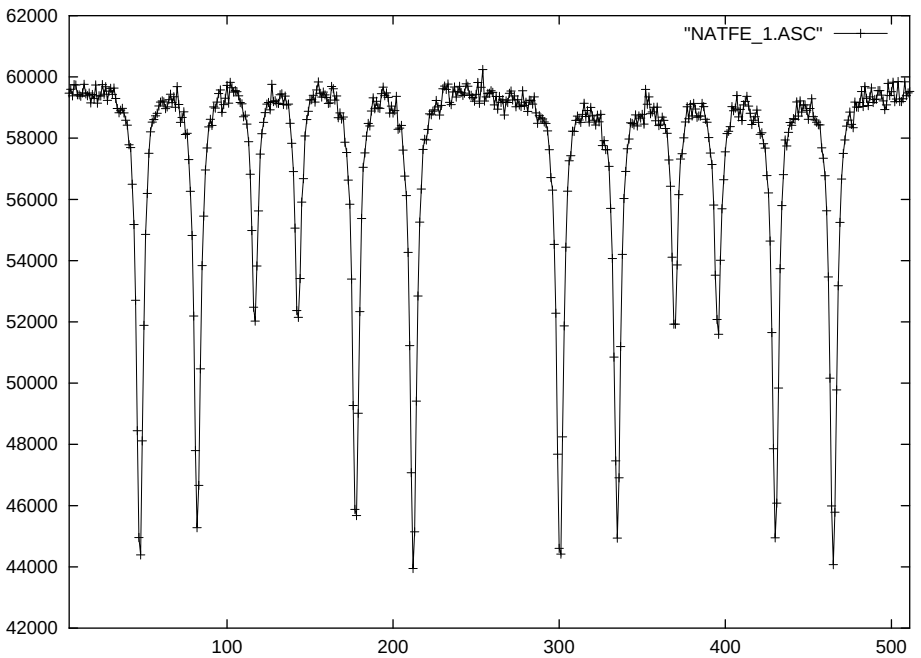


Fig. 4.1: 天然の Fe(By GNUPLOT)

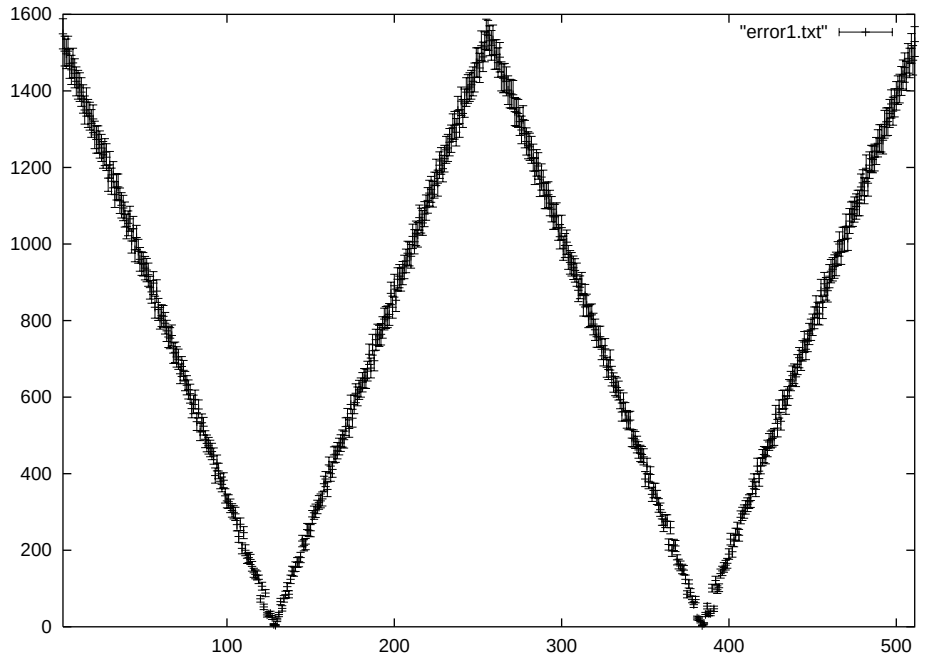


Fig. 4.2: Velocity calibrator のデータ (By GNUPLOT)

これらはすべて生データで, これから Fit していくことで実際に g-factor を測定する。

5. 解析結果

Fitdata　左半分は background に山があり、逆に右半分は谷がある。以上より左半分が線源に近づく状態をあらわしている。以後、このグラフの左側のみを考慮する。

- Fig.4.1 について

  吸収線を Lorentz 関数で Fit して background を二次関数で Fit する。つまり

  $$J = a\,(x-b)^2 + c + \sum_{n=1}^{6} \frac{I_n}{(x-E_n)^2 + W_n}$$

  で Fit する。その結果は以下のようになる。

- Fig.4.2 について

  calibration データを $|x|$ で Fit する。具体的には

  $$V = p\,|x-q|$$

  を用いる。結果は以下のようになる。

- ピークに対応する速度

  ピーク時の速度対応を以下にあげておく。

パラメータ	値	カウント	速度 [mm/sec]
E_1	47.5764	975.6009	5.215947
E_2	82.2031	557.1857	2.978934
E_3	116.756	139.6622	0.746689
E_4	142.818	175.2605	−0.93701
E_5	177.564	595.1173	−3.18173
E_6	212.245	1014.189	−5.42225

パラメータ	値	誤差 (数値)	誤差 (%)
I_1	-84792.4	$+/-$ 2140	-2.52 %
I_2	-80320.7	$+/-$ 2211	-2.75 %
I_3	-37804.2	$+/-$ 2062	-5.46 %
I_4	-38141.8	$+/-$ 2061	-5.40 %
I_5	-78029.4	$+/-$ 2148	-2.75 %
I_6	-89097.5	$+/-$ 2255	-2.53 %
E_1	47.5764	$+/-$ 0.02208	-0.05 %
E_2	82.2031	$+/-$ 0.02419	-0.03 %
E_3	116.756	$+/-$ 0.04502	-0.04 %
E_4	142.818	$+/-$ 0.04475	-0.03 %
E_5	177.564	$+/-$ 0.02392	-0.01 %
E_6	212.245	$+/-$ 0.02228	-0.01 %
W_1	5.34545	$+/-$ 0.16	-2.99 %
W_2	5.46479	$+/-$ 0.1776	-3.25 %
W_3	4.75059	$+/-$ 0.3074	-6.47 %
W_4	4.76154	$+/-$ 0.3055	-6.42 %
W_5	5.28949	$+/-$ 0.1725	-3.26 %
W_6	5.58464	$+/-$ 0.1664	-2.98 %

カウント数と速度の対応は

$$v\,[\mathrm{mm/sec}] = \frac{\mathrm{counts}}{3160.56 \times 59180 \times 10^{-6}}$$

で与えられることをここで用いた。

Fig. 4.1 の左側の 6 個の吸収線に対して左から 1,2,3,4,5,6 と番号を付けていく。そしてそれに対応する速度を $v_i, (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ とする。このとき励起状態をあらわす物理量には添え字で e、基底状態をあらわすものには g とすると、(5) より

$$\left(1 + \frac{v_1}{c}\right) E_\gamma = \left[E_e - g_e \mu_N H \left(-\frac{3}{2}\right)\right] - \left[E_g - g_g \mu_N H \left(-\frac{1}{2}\right)\right] \tag{6}$$

$$= (E_e - E_g) + \frac{3}{2} g_e \mu_N H - \frac{1}{2} g_g \mu_N H \tag{7}$$

これと同様にしてほかの吸収線に関しても

$$\left(1 + \frac{v_2}{c}\right) E_\gamma = (E_e - E_g) + \frac{1}{2} g_e \mu_N H - \frac{1}{2} g_g \mu_N H \tag{8}$$

$$\left(1 + \frac{v_3}{c}\right) E_\gamma = (E_e - E_g) - \frac{1}{2} g_e \mu_N H - \frac{1}{2} g_g \mu_N H \tag{9}$$

$$\left(1 + \frac{v_4}{c}\right) E_\gamma = (E_e - E_g) + \frac{1}{2} g_e \mu_N H + \frac{1}{2} g_g \mu_N H \tag{10}$$

$$\left(1 + \frac{v_5}{c}\right) E_\gamma = (E_e - E_g) - \frac{1}{2} g_e \mu_N H + \frac{1}{2} g_g \mu_N H \tag{11}$$

$$\left(1 + \frac{v_6}{c}\right) E_\gamma = (E_e - E_g) - \frac{3}{2} g_e \mu_N H + \frac{1}{2} g_g \mu_N H \tag{12}$$

パラメータ	値	誤差 (数値)	誤差 (%)
p	12.0836	$+/-$ 0.02164	-0.18 %
q	128.314	$+/-$ 0.05823	-0.05 %

と計算される。このうちから式を三つ取り出して $(E_e - E_g), g_e, g_g$ を求めることになる (ただし $E_e - E_g$ は不要であるが。)。この組み合わせとして ${}_6\mathrm{C}_2 = 20$ 通り考えられるが、そのうち解が定まるのは 18 個である[1]。今、わかっている値として[2]

$$
\begin{aligned}
E_\gamma &= 14.4\,[\mathrm{keV}] \\
\mu_N &= 5.05 \times 10^{-27}\,[\mathrm{J/T}] \\
c &= 3.00 \times 10^{8}\,[\mathrm{m/sec}] \\
e &= 1.60 \times 10^{-19}\,[\mathrm{C}] \\
H &= 33.0\,[\mathrm{T}]
\end{aligned}
$$

これらを代入した値は以下のようになっている。

数式番号の組み合わせ	g_e	g_g
7.8.11	0.103	−0.181
7.8.10	0.103	−0.181
7.8.12	0.103	−0.181
7.9.10	0.103	−0.181
7.9.11	0.103	−0.181
7.9.12	0.103	−0.181
7.10.11	0.103	−0.180
7.10.12	0.103	−0.180
7.11.12	0.103	−0.181
8.9.10	0.103	−0.181
8.9.11	0.103	−0.181
8.9.12	0.103	−0.181
8.10.11	0.103	−0.181
8.10.12	0.103	−0.181
8.11.12	0.103	−0.181
9.10.11	0.103	−0.181
9.10.12	0.103	−0.181
10.11.12	0.103	−0.181

6. 解析結果の考察

文献値との比較　文献 [1] によると

g_e	g_g
−0.15463	0.09061

となっている。この値にはスピンがそれぞれ $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ だけ加味された値になっているので我々の表記ではこれらをそれぞれ $\frac{2}{3}, 2$ 倍して

g_e	g_g
−0.10308	0.18122

とすればよいことがわかる。

先ほど得た値と比較するとちょうど正負が逆になっている。考えられる原因として以下のものがあげられる。

今回この値を得る上でここには記してはいないが 18 個の連立方程式を解いた。その過程で

$$
g_e = \frac{1}{2}\frac{E_\gamma}{c\mu_N H}\,(v_1 - v_3)
$$

などという式が現れたが, この値の正負が逆になるということはここで考えられるものとして

[1] 気になる人は手計算でやってください。我々は逆行列を組むプログラムを Excel 上でつくり、逆行列の有無で判断した。

[2] E_γ: [2] による; μ_N, c, e:[1] による; H:北尾教官による

- v のとり方が正負逆になっていた。
- H の取る向きが逆になっていた。

の二つが考えられる。しかし前者はバックグラウンドからの考察よりその正当性は確かめられている。ということは後者が原因と考えられる。

この正負逆の結果を除くと 10^{-3} のオーダーまでの精度で g-factor が得られたことがわかる。

誤差の評価　巻末の補足にあるように g の値は 36 個の式によって与えられる。そしてこれらはすべて v_i というパラーメータによって定められるので誤差の伝播公式より

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{\partial g}{\partial v_i} \right)^2 \sigma_{v_i}^2$$

という誤差が最終的に現れる。今、全体の誤差を知るためには v_i の誤差を知る必要がある。これはフィットデータの誤差の最大、最小によって与えられ、以下のようになる。

$\sigma_{v_1}^2$	$\sigma_{v_2}^2$	$\sigma_{v_3}^2$	$\sigma_{v_4}^2$	$\sigma_{v_5}^2$	$\sigma_{v_6}^2$
7.394575	3.98212	2.25009	2.435156	4.244488	7.786842

これらを誤差の伝播公式に代入して巻末の g を一つづつ代入すると以下のようになる。

数式番号	誤差 (σ_{g_e})	誤差 (σ_{g_g})	数式番号	誤差 (σ_{g_e})	誤差 (σ_{g_g})
7.8.11	0.000831	0.001565	8.9.10	0.000615	0.000624
7.8.10	0.000831	0.000624	8.9.11	0.000615	0.000628
7.8.12	0.000831	0.002109	8.9.12	0.000615	0.001123
7.9.10	0.000335	0.000543	8.10.11	0.000637	0.000624
7.9.11	0.000765	0.000533	8.10.12	0.000394	0.000624
7.9.12	0.000383	0.000945	8.11.12	0.000855	0.001321
7.10.11	0.000773	0.00114	9.10.11	0.000788	0.000628
7.10.12	0.000386	0.000949	9.10.12	0.000394	0.000488
7.11.12	0.000855	0.002159	9.11.12	0.000855	0.000628

このことから g には 10^{-3}から 10^{-4} 程度の誤差が生じている。現在有効数字が 3 桁で計算されていたことから前出の結果が妥当であると考えられる。

誤差を少なくするには　誤差の原因として

- H の正確な値が与えられていない。
- 電源特性によるノイズが入っている。

7. 補足

g を求める上で用いた式をすべてここに列挙しておく。ただしここで出てくる新しい文字は

$$\alpha = \frac{E_\gamma}{c\mu_N H}$$

である。

$$(\text{eq.7.8.11}) : \begin{cases} g_e = \alpha\,(v_1 - v_2) \\ g_g = \alpha\,(v_1 + v_5 - 2v_2) \end{cases}$$

$$(\text{eq.7.8.10}) : \begin{cases} g_e = \alpha\,(v_1 - v_2) \\ g_g = \alpha\,(v_4 - v_2) \end{cases}$$

$$(\text{eq.7.8.12}) : \begin{cases} g_e = \alpha\,(v_1 - v_2) \\ g_g = \alpha\,(2v_1 - 3v_2 + v_6) \end{cases}$$

$$(\text{eq.7.9.10}) : \begin{cases} g_e = \frac{1}{2}\alpha\,(v_1 - v_3) \\ g_g = \frac{1}{2}\alpha\,(-v_1 - v_3 + 2v_4) \end{cases}$$

$$(\text{eq.7.9.11}) : \begin{cases} g_e = \frac{1}{2}\alpha\,(v_1 - v_3) \\ g_g = \alpha\,(v_5 - v_3) \end{cases}$$

$$(\text{eq.7.9.12}) : \begin{cases} g_e = \frac{1}{2}\alpha\,(v_1 - v_3) \\ g_g = \frac{1}{2}\alpha\,(v_1 - v_3 + 2v_6) \end{cases}$$

$$(\text{eq.7.10.11}) : \begin{cases} g_e = \alpha\,(v_1 - v_4) \\ g_g = \alpha\,(-v_1 + 2v_4 - v_5) \end{cases}$$

$$(\text{eq.7.10.12}) : \begin{cases} g_e = \frac{1}{2}\alpha\,(v_1 - v_4) \\ g_g = \frac{1}{2}\alpha\,(-2v_2 + 3v_4 - v_6) \end{cases}$$

$$(\text{eq.7.11.12}) : \begin{cases} g_e = \alpha\,(v_5 - v_6) \\ g_g = \alpha\,(-v_1 + 3v_5 - 2v_6) \end{cases}$$

$$(\text{eq.8.9.10}) : \begin{cases} g_e = \alpha\,(v_2 - v_3) \\ g_g = \alpha\,(-v_2 + v_4) \end{cases}$$

$$(\text{eq.8.9.11}) : \begin{cases} g_e = a\,(v_2 - v_3) \\ g_g = \alpha\,(-v_3 + v_5) \end{cases}$$

$$(\text{eq.8.9.12}) : \begin{cases} g_e = \alpha\,(v_2 - v_3) \\ g_g = \alpha\,(v_2 - 3v_3 + v_6) \end{cases}$$

$$(\text{eq.8.10.11}) : \begin{cases} g_e = \alpha\,(v_4 - v_5) \\ g_g = \alpha\,(-v_2 + v_4) \end{cases}$$

$$(\text{eq.8.9.12}) : \begin{cases} g_e = \alpha\,(v_2 - v_3) \\ g_g = \alpha\,(v_2 - 2v_3 + v_6) \end{cases}$$

$$(\text{eq.8.9.11}) : \begin{cases} g_e = \alpha\,(v_2 - v_3) \\ g_g = \alpha\,(-v_3 + v_5) \end{cases}$$

$$(\text{eq.9.10.11}) : \begin{cases} g_e = \alpha\,(v_4 - v_5) \\ g_g = \alpha\,(-v_3 + v_5) \end{cases}$$

$$(\text{eq.9.10.12}) : \begin{cases} g_e = \frac{1}{2}\alpha\,(v_4 - v_6) \\ g_g = \frac{1}{2}\alpha\,(-2v_3 + v_4 + v_6) \end{cases}$$

$$(\text{eq.9.11.12}) : \begin{cases} g_e = \alpha\,(v_5 - v_6) \\ g_g = \alpha\,(-v_3 + v_5) \end{cases}$$

関連図書

[1] 国立天文台: 理科年表平成 13 年版 (丸善,2001)

[2] Richard B. Firestone et al.: *Table of Isotopes CD-ROM Edition*, Version 1.0 (Wiley-Interscience, 1996)