特殊相対論を使って運動学を計算しよう

タンデムで行う実験でのエネルギーは非相対論的なものですが、どれだけエネルギーが上がっても計算できるように特殊相対論を使って数値計算できるようにしましょう。

1. 重心系の速度を求める

重心系の速度をβとするとローレンツ変換を用いて

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 \\ p_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma E_1-\beta\gamma\ p_1 \\ -\beta\gamma\ E_1+\gamma\ p_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_2 \\ p_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma E_2-\beta\gamma\ p_2 \\ -\beta\gamma\ E_2+\gamma\ p_2 \end{pmatrix}$$

$p_{1CM}=p_{2CM}$から

$$\beta=\frac{p_1+p_2}{E_1+E_2},\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

です。

2. 重心系のエネルギーを求める

さっきのローレンツ変換をしたときの式を使えば、重心系のそれぞれのエネルギーE_{1CM}, E_{2CM}、運動量 p_{1CM}, p_{2CM}は出ますね。

重心系のエネルギーを$E_{CM}=E_{1CM}+E_{2CM}$とすると

$$E_{CM}=\sqrt{(E_1+E_2)^2-(p_1+p_2)^2}$$

3. 散乱粒子のエネルギー運動量を求める

エネルギー、運動量保存則から

$E_{3CM}+E_{4CM}=E_{CM}$

$p_{3CM}=p_{4CM}$

を用いると

$$E_{3CM}=\frac{1}{2}\left(E_{CM}+\frac{M_3^2-M_4^2}{E_{CM}}\right)$$

$$E_{4CM}=\frac{1}{2}\left(E_{CM}-\frac{M_3^2-M_4^2}{E_{CM}}\right)$$

$$p_{CM} = \sqrt{E_{3CM}^2 - M_3^2}$$
$$= \frac{1}{2E_{CM}} \sqrt{(E_{CM} - M_3 + M_4)(E_{CM} - M_3 - M_4)(E_{CM} + M_3 - M_4)(E_{CM} + M_3 + M_4)}$$

ですね。

4. 実験室系でのエネルギー運動量を求めよう

重心系で求めたエネルギー、運動量をローレンツ変換して、実験室系のものに直しましょう。

$$\begin{pmatrix} E_{3lab} \\ p_{3lab//} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{3CM} \\ p_{CM}\cos\theta_{CM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma E_{3CM} + \beta\gamma\, p_{CM}\cos\theta_{CM} \\ \beta\gamma\, E_{3CM} + \gamma\, p_{CM}\cos\theta_{CM} \end{pmatrix}$$

ここで求めた運動量は重心系の速度に射影した運動量です。

運動量の重心系の速度に直角な成分は変わらないので運動量の大きさは

$$p_{3lab} = \sqrt{(\gamma\beta E_{CM} + \gamma p_{CM}\cos\theta_{CM})^2 + p_{CM}^2 \sin^2\theta_{CM}}$$

重心系の角度と実験室系の角度の関係は重心の速度に直角な成分がどちらの系でも等しいことから

$$\sin\theta_{lab} = \frac{p_{CM}}{p_{3lab}} \sin\theta_{CM}$$

ですね。

5. ではプログラムを書こう

インプットとしてはそれぞれの質量 M_1, M_2, M_3, M_4（弾性散乱のときは M_1=M_3, M_2=M_4）と粒子 1,2 の運動量 p_1, p_2 (粒子２が標的のときは p_2=0)、そして重心系での？？？ θ_{CM} です。

アウトプットとしては粒子 3 の運動量そして実験室系での散乱角 θ_{lab} ですね。

なので重心系の散乱角 θ_{CM} を 0 度から 180 度まで 1 度ずつ変えていって、そのときの粒子３の運動量(運動エネルギーでも OK)と散乱角を求めましょう。